



УДК: 532.5

MSC 2010: 37J60 37J35 70E18 70F25 70H45

## Обобщение преобразования Чаплыгина и явное интегрирование шарового подвеса

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев

В работе исследованы две задачи из неголономной механики, связанные с качением шаров. Одна из них — классическая задача С. А. Чаплыгина о качении без проскальзывания уравновешенного динамически несимметричного шара по горизонтальной плоскости. Другая — предложенная Ю. Н. Фёдоровым новая задача о движении твердого тела в шаровом подвесе. Для первой задачи мы подробно рассматриваем нетривиальное преобразование, примененное Чаплыгиным к интегрированию системы при ненулевой константе площадей и проясняем его геометрический смысл (у Чаплыгина это преобразование представлено довольно сложными, неочевидными аналитическими выкладками). Оказывается, что при понимании его геометрии преобразование Чаплыгина может быть обобщено на задачу о движении тела в шаровом подвесе, для которой с момента ее постановки в 1988 г. не было предложено никаких успешных подходов к методике явного интегрирования. В нашей работе показано, что с помощью обобщения преобразования Чаплыгина эта новая задача сводится к классической системе Чаплыгина. Выполненное нами обобщение позволяет не только явно проинтегрировать уравнения движения шарового

---

Получено 22 апреля 2011 года

После доработки 23 июня 2011 года

---

Работа выполнена при поддержке Гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. № 11.G34.31.0039), Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», мероприятие 1.1. «Научно-образовательный центр Регулярная и хаотическая динамика» (ГК № 02.740.11.0195), мероприятие 1.5 «Топология и механика», (ГК № 14.740.11.0876). Работа А. А. Килина поддержана грантом Президента РФ поддержки молодых кандидатов наук МК-8428.2010.1.

---

Борисов Алексей Владимирович

[borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru)

Килин Александр Александрович

[aka@rcd.ru](mailto:aka@rcd.ru)

Мамаев Иван Сергеевич

[mamaev@rcd.ru](mailto:mamaev@rcd.ru)

Институт компьютерных исследований

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1



подвеса в квадратурах, но и исследовать особо замечательные критические траектории и их устойчивость, выполнить качественный анализ движения задачи. Вполне возможно, что указанные решения могут иметь приложения в различных технических устройствах и при конструировании робототехнических мобильных средств. Кроме того, мы рассматриваем случай, когда к системе с шаровым подвесом добавлен постоянный гиростатический момент. Показано, что добавление гиростата не приводит к потере интегрируемости задачи.

Ключевые слова: неголономная механика, шаровой подвес, шар Чаплыгина, явное интегрирование, изоморфизм, бифуркационный анализ

## Содержание

<b>Введение</b>	314
<b>1. Преобразование Чаплыгина в задаче о качении шара по плоскости</b>	315
1.1. Уравнения движения, первые интегралы, инвариантная мера	315
1.2. Явное интегрирование шара на нулевой константе площадей	316
1.3. Линейный траекторный изоморфизм	317
1.4. Приведение к нулевой постоянной площадей (преобразование Чаплыгина)	319
1.5. Бифуркационный анализ и устойчивость периодических решений	320
<b>2. Твердое тело в шаровом подвесе</b>	324
2.1. Уравнения движения, первые интегралы, инвариантная мера	324
2.2. Подвес с резиновыми шарами	326
2.3. Гиростат в шаровом подвесе	328
2.4. Шаровой подвес в случае $M \parallel \beta$	329
2.5. Линейный траекторный изоморфизм	330
2.6. Приведение к нулевым «постоянным площадей»	332
2.7. Бифуркационный анализ и устойчивость периодических решений	333
<b>3. Движение шара Чаплыгина по прямой (система Веселовых)</b>	335

## Введение

В этой работе мы рассматриваем проблему явного интегрирования и бифуркационного анализа для двух систем неголономной механики:

- для задачи Чаплыгина о качении без проскальзывания уравновешенного динамически несимметричного шара по горизонтальной плоскости,
- для задачи о движении твердого тела в шаровом подвесе.

В последнее время к подобного рода системам, с применением катящихся шаров, наблюдается значительный подъем интереса в связи с возможными приложениями в робототехнике и транспортных средствах. Так, в работе [21] рассматривается использование шара в качестве новой модели марсохода. Кроме этого рассматриваются и более сложные



конструкции на основе системы шаров, взаимодействующих друг с другом посредством неголономных связей, как с точки зрения кинематики в различных манипуляторах [11], так и в динамике, например, в конструкции шаробота (ballbot) [17–19]. В шароботе для передвижения используется основной большой шар, перемещением которого управляют прикрепленные колеса (либо обычные колеса, либо омниколеса, либо шаровые колеса). Отметим, что конструкции, родственные шароботу и отличающиеся от стандартных средств передвижения, обладают хорошей маневренностью и находят все большее применение в различных устройствах, таких, например, как гирровер — робот-колесо (рассмотрен в работе [22]), и даже в некоторых моделях пылесосов [23].

В связи с этим большой интерес представляет изучение динамики вышеупомянутых систем. Хотя, как правило, в робототехнике больший интерес представляют задачи, связанные с управлением, изучение динамики свободной системы также важно. Так, в частности, особые устойчивые решения свободной системы могут служить основой при конструировании соответствующих управлений, тогда как для использования неустойчивых траекторий их необходимо стабилизировать.

Задачу о качении шара С. А. Чаплыгин проинтегрировал в квадратурах в 1903 г. [9]. С тех пор ее исследованию было посвящено значительное количество работ, вследствие чего динамика этой системы (за исключением анализа траекторий точки контакта) достаточно хорошо изучена. (См., например, [12, 15, 20] и литературу в этих работах; в статье А. А. Килина [15] вычисления [9] проделаны в современных обозначениях; некоторую интерпретацию преобразованию Чаплыгина пытался дать Дж. Дюистермаат [12].) В 1988 г. Ю. Н. Фёдоровым была предложена задача о динамике тела в шаровом подвесе [7]. По этой системе, кроме того, что она интегрируемая [7], практически ничего опубликовано не было. Это объясняется, с одной стороны, тем, что задача не столь широко известна, а с другой — тем, что она существенно сложнее задачи Чаплыгина и общих подходов к интегрированию подобных систем не разработано. В данной работе мы решаем эту проблему при помощи обобщения преобразования, примененного С. А. Чаплыгиным к интегрированию задачи о качении шара при ненулевой постоянной площадей. Это весьма нетривиальное преобразование, демонстрирующее необыкновенное аналитическое мастерство С. А. Чаплыгина, на первый взгляд представляет собой набор громоздких, неочевидных выкладок. Здесь мы проясняем его геометрический смысл с точки зрения траекторного изоморфизма двух систем одного и того же типа на различных уровнях интеграла энергии. Обобщение этого преобразования на случай задачи о теле в шаровом подвесе позволяет не только явно проинтегрировать уравнения движения в квадратурах, но также указать критические периодические решения и проанализировать их устойчивость.

Помимо этого, в данной работе мы также показываем, что добавление гиростата в задаче о теле в шаровом подвесе не приводит к потере интегрируемости. Это — новая интегрируемая система неголономной механики.

## 1. Преобразование Чаплыгина в задаче о качении шара по плоскости

### 1.1. Уравнения движения, первые интегралы, инвариантная мера

Пусть динамически несимметричное уравновешенное твердое тело со сферической поверхностью (шар Чаплыгина) катится без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости. Выберем подвижную систему координат, связанную с главными осями инер-

ции шара, и обозначим через  $\omega$ ,  $m$ ,  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ ,  $b$  соответственно угловую скорость, массу, тензор инерции и радиус шара. Угловой момент шара относительно точки касания  $Q$  имеет вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\omega + \mathcal{D}\gamma \times (\omega \times \gamma), \quad \mathcal{D} = mb^2, \quad (1)$$

где  $\gamma$  — вектор нормали к плоскости (см. рис. 1).

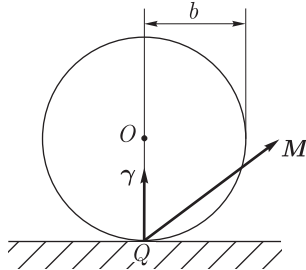


Рис. 1.

Полное фазовое пространство системы представляет собой многообразие  $T(SO(3) \times \mathbb{R}^2)$ . Как хорошо известно, уравнения, описывающие эволюцию векторов  $\mathbf{M}$ ,  $\gamma$ , представляются в замкнутой форме

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \quad (2)$$

где угловая скорость выражается через момент с помощью соотношения (1) по формуле

$$\omega = \mathbf{A}(\mathbf{M} + Z\gamma), \quad \mathbf{A} = (\mathbf{I} + \mathcal{D}\mathbf{E})^{-1}, \quad Z = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{M}, \gamma)}{\mathcal{D}^{-1} - (\gamma, \mathbf{A}\gamma)}. \quad (3)$$

Таким образом, в данном случае уравнения (2), (3) задают четырехпараметрическое семейство систем, в качестве параметров которого будем использовать  $\mathcal{D}$  и  $A_1, A_2, A_3$  — собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$ .

Система (2) обладает инвариантной мерой  $\rho d\mathbf{M} d\gamma$  с плотностью

$$\rho = (\mathcal{D}^{-1} - (\gamma, \mathbf{A}\gamma))^{-1/2} \quad (4)$$

и допускает четыре первых интеграла:

$$\begin{aligned} F_0 &= (\gamma, \gamma) = 1, \quad F_1 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}), \quad F_2 = (\mathbf{M}, \gamma), \\ H &= \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \omega) = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) + \frac{1}{2}Z(\mathbf{A}\mathbf{M}, \gamma). \end{aligned} \quad (5)$$

Траектория точки касания шара и плоскости находится при помощи интегрирования уравнений

$$\dot{x} = b(\omega, \beta), \quad \dot{y} = -b(\omega, \alpha), \quad (6)$$

где  $\alpha, \beta$  — неподвижные в пространстве орты, параллельные плоскости качения, записанные в подвижных осях. В случае, когда  $\mathbf{M}$  и  $\gamma$  не параллельны, можно, например, выбрать

$$\alpha = \frac{\mathbf{M} \times \gamma}{\sqrt{(\mathbf{M}, \mathbf{M}) - (\mathbf{M}, \gamma)^2}}, \quad \beta = \frac{\mathbf{M} - (\mathbf{M}, \gamma)\gamma}{\sqrt{(\mathbf{M}, \mathbf{M}) - (\mathbf{M}, \gamma)^2}}. \quad (7)$$

## 1.2. Явное интегрирование шара на нулевой константе площадей

В задаче о качении шара Чаплыгина положим

$$M_\gamma = (\mathbf{M}, \gamma) = (\mathbf{I}\omega, \gamma) = 0 \quad (8)$$

и приведем уравнения движения к квадратурам на уровне первых интегралов (5). Для этого, используя соотношение (8) и уравнение движения

$$\dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \quad (9)$$

выразим угловую скорость  $\omega$  и момент  $M$  через векторы  $\gamma, \dot{\gamma}$ . Умножая обе части уравнения (9) векторно на  $I\gamma$ , с учетом (8) и (1) получим

$$\begin{aligned}\omega &= k\dot{\gamma} \times I\gamma, \quad M = kI(\dot{\gamma} \times I\gamma) - D\dot{\gamma} \times \gamma, \\ k^{-1} &= (\gamma, I\gamma).\end{aligned}\tag{10}$$

На сфере  $\gamma^2 = 1$  определим сферо-конические координаты  $q_1, q_2$  как корни уравнения

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\gamma_i^2}{a_i - x} = 0,$$

где  $a_i = \frac{D}{I_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . При этом

$$\gamma_1^2 = \frac{(a_1 - q_1)(a_1 - q_2)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \quad \gamma_2^2 = \frac{(a_2 - q_1)(a_2 - q_2)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}, \quad \gamma_3^2 = \frac{(a_3 - q_1)(a_3 - q_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}.$$

Продифференцируем эти соотношения по времени и с помощью (10) представим квадратичные интегралы движения  $H, F_1$  как функции обобщенных координат и скоростей  $q_i, \dot{q}_i$ ,  $i = 1, 2$ , следующим образом:

$$\begin{aligned}H &= \frac{D(q_1 - q_2)\Phi}{2} \left[ \frac{\dot{q}_1^2}{q_2\varphi(q_1)} - \frac{\dot{q}_2^2}{q_1\varphi(q_2)} \right], \quad F_1 = D^2(q_1 - q_2)\Phi \left[ \frac{(1 + q_2)\dot{q}_1^2}{q_2^2\varphi(q_1)} - \frac{(1 + q_1)\dot{q}_2^2}{q_1^2\varphi(q_2)} \right], \\ \Phi &= \frac{(1 + q_1)(1 + q_2)}{4}, \quad \varphi(x) = (1 + x)(a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x).\end{aligned}$$

На фиксированном общем уровне первых интегралов  $2H = \mathcal{E}$ ,  $F_1 = \mathcal{C}$ , где  $\mathcal{E}, \mathcal{C}$  — некоторые постоянные, получим квадратуры

$$\dot{q}_1^2 = \frac{q_2^2\varphi(q_1)(\mathcal{C}q_1 - \mathcal{E}D(1 + q_1))}{D^2(q_1 - q_2)}, \quad \dot{q}_2^2 = \frac{q_1^2\varphi(q_2)(\mathcal{C}q_2 - \mathcal{E}D(1 + q_2))}{D^2(q_1 - q_2)}.\tag{11}$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Разделяющие переменные системы (2) при  $(M, \gamma) = 0$  могут быть найдены при помощи следующего простого подхода, предложенного Эйзенхартом [13]. Выберем произвольные локальные переменные  $x = (x_1, x_2)$  на сфере  $\gamma^2 = 1$ ; согласно (10), первые интегралы  $H, F_1$  представляются в виде однородных квадратичных форм по скоростям  $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$

$$H = (\dot{x}, B_1 \dot{x}), \quad F_1 = (\dot{x}, B_2 \dot{x}),$$

где  $B_1, B_2$  —  $2 \times 2$ -матрицы, зависящие от координат  $x$ . В этом случае собственные значения  $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$  матрицы  $B_1 B_2^{-1}$  являются разделяющими переменными системы. Как правило, для упрощения формул удобнее брать функции от этих переменных  $q_1(\lambda_1), q_2(\lambda_2)$ .

### 1.3. Линейный траекторный изоморфизм

Согласно уравнениям (2), векторы  $M, \gamma$  постоянны в неподвижной системе координат. Следовательно, их линейные комбинации (с постоянными коэффициентами) также определяют постоянные векторы в неподвижных осях, а в подвижной системе координат их эволюция описывается теми же уравнениями:

$$\begin{aligned}\widetilde{M} &= m_1 M + m_2 \gamma, \quad \widetilde{\gamma} = c_1 M + c_2 \gamma, \\ \dot{\widetilde{M}} &= \widetilde{M} \times \omega, \quad \dot{\widetilde{\gamma}} = \widetilde{\gamma} \times \omega.\end{aligned}\tag{12}$$

Для преобразованных векторов  $\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$  определим трансформированную угловую скорость  $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$  соотношением, совпадающим с соотношением (3):

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{M}} + \widetilde{\mathbf{Z}}\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}), \quad \widetilde{\mathbf{Z}} = \frac{(\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\gamma}})}{\widetilde{\mathcal{D}}^{-1} - (\mathbf{A}\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\boldsymbol{\gamma}})}. \quad (13)$$

**Теорема 3.** Если на фиксированном уровне интеграла энергии  $2H = \mathcal{E}$  коэффициенты преобразования (12) удовлетворяют соотношениям

$$R_1 = m_2\widetilde{\mathcal{D}}^{-1} + \mathcal{E}c_1\Delta = 0, \quad R_2 = m_1\widetilde{\mathcal{D}}^{-1} - c_2\Delta\mathcal{D}^{-1} = 0, \quad (14)$$

$$\Delta = m_1c_2 - m_2c_1,$$

то векторы  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$  пропорциональны:

$$\boldsymbol{\omega} = \lambda\widetilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad (15)$$

где коэффициент  $\lambda$  — некоторая функция фазовых переменных  $\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}$ .

*Доказательство.* Обозначим знаменатель и числитель величины  $\mathbf{Z}$  следующим образом:

$$X = \mathcal{D}^{-1} - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}), \quad Y = (\mathbf{A}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (16)$$

Тогда после преобразования (12), воспользовавшись соотношениями  $(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \mathcal{E} - X^{-1}Y^2$ ,  $(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}) = \mathcal{D}^{-1} - X$ , получим

$$\begin{aligned} \widetilde{X} &= \widetilde{\mathcal{D}}^{-1} - c_1^2(\mathcal{E} - X^{-1}Y^2) - c_2^2(\mathcal{D}^{-1} - X) - 2c_1c_2Y, \\ \widetilde{Y} &= m_1c_1(\mathcal{E} - X^{-1}Y^2) + m_2c_2(\mathcal{D}^{-1} - X) + (m_1c_2 + m_2c_1)Y. \end{aligned} \quad (17)$$

Условие пропорциональности векторов  $\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}$  представим в форме

$$\Delta_{ij} = \omega_i\widetilde{\omega}_j - \omega_j\widetilde{\omega}_i = 0, \quad i \neq j.$$

С помощью соотношений (13) и (17) находим

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &= A_iA_j(M_i\gamma_j - M_j\gamma_i)\Phi(X, Y), \\ \Phi(X, Y) &= \frac{R_2Y - R_1X}{(\mathcal{E}c_1^2 + \mathcal{D}^{-1}c_2^2 - \widetilde{\mathcal{D}}^{-1})X - (c_2X - c_1Y)^2}, \end{aligned}$$

где  $A_i = (I_i + \mathcal{D})^{-1}$  — элементы матрицы  $\mathbf{A}$ . Отсюда заключаем, что условие пропорциональности выполняется при  $\Phi(X, Y) = 0$ , т. е. при произвольных  $X, Y$  определяется соотношениями (14). ■

Несложно также видеть, что коэффициент пропорциональности  $\lambda$  задается соотношением

$$\lambda = m_1 + c_1\widetilde{\mathbf{Z}}. \quad (18)$$

Согласно этой теореме, в новых переменных уравнения движения представляются в форме

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{\mathbf{M}}} &= \lambda\widetilde{\mathbf{M}} \times \widetilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad \dot{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}} = \lambda\widetilde{\boldsymbol{\gamma}} \times \widetilde{\boldsymbol{\omega}}, \\ \widetilde{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{M}} + \widetilde{\mathbf{Z}}\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}), \quad \widetilde{\mathbf{Z}} = \frac{(\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\gamma}})}{\widetilde{\mathcal{D}}^{-1} + (\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \mathbf{A}\widetilde{\boldsymbol{\gamma}})}, \end{aligned} \quad (19)$$

т. е. отличаются от исходных (2) лишь дополнительным коэффициентом  $\lambda$ , который может быть исключен с помощью замены времени.

Отметим, что хотя, согласно (3), величина  $\mathcal{D}$  входит также в матрицу  $\mathbf{A}$ , мы при определении  $\tilde{\omega}$  полагаем, что  $\mathbf{A}$  не меняется, в то время как в знаменатель  $\tilde{Z}$  входит не  $\mathcal{D}$ , а  $\tilde{\mathcal{D}}$ , т.е. в этом случае меняются также моменты инерции шара, так чтобы сама  $\mathbf{A}$  осталась неизменной! Таким образом, *это преобразование не является симметрией системы, а задает траекторный изоморфизм с другой системой того же типа.*

Уровень интеграла энергии  $(\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\omega}) = \tilde{\mathcal{E}}$  системы (19) связан с уровнем энергии исходной системы соотношением

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}m_1^2 + \mathcal{D}^{-1}m_2^2. \quad (20)$$

От уравнений (14) удобно перейти к эквивалентной системе соотношений (используя линейные комбинации  $R_1, R_2$ ):

$$\mathcal{E}m_1c_1 + \mathcal{D}^{-1}m_2c_2 = 0, \quad \tilde{\mathcal{D}}^{-1} = \mathcal{E}c_1^2 + \mathcal{D}^{-1}c_2^2. \quad (21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Соотношения (20), (21) имеют замечательную геометрическую интерпретацию. Для двумерных векторов определим метрику вида

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathcal{E}x_1y_1 + \mathcal{D}^{-1}x_2y_2,$$

при этом строки матрицы преобразования Чаплыгина

$$\mathbf{Q}_{\mathcal{E}} = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

оказываются ортогональными относительно метрики вида

$$\langle \mathbf{m}, \mathbf{c} \rangle = 0,$$

где  $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ . Кроме того, новая постоянная  $\tilde{\mathcal{D}}$  и величина интеграла энергии  $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\omega})$  определяются соотношениями

$$\tilde{\mathcal{D}}^{-1} = \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle, \quad \tilde{\mathcal{E}} = \langle \mathbf{m}, \mathbf{m} \rangle.$$

#### 1.4. Приведение к нулевой постоянной площадей (преобразование Чаплыгина)

Без ограничения общности можно положить

$$F_0 = (\gamma, \gamma) = 1, \quad F_1 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \mathcal{C}, \\ F_2 = (\mathbf{M}, \gamma) = M_\gamma,$$

при этом  $|M_\gamma| \leq \sqrt{\mathcal{C}}$ .

Соотношения (21) параметризуем следующим образом:

$$m_1 = \eta \cos \theta, \quad m_2 = -\eta k \sin \theta, \quad c_1 = \delta \sin \theta, \quad c_2 = \delta k \cos \theta, \\ k^2 = \mathcal{E}\mathcal{D}, \quad \delta^2 = \mathcal{D}\tilde{\mathcal{D}}^{-1}.$$

При этом получается трехпараметрическое семейство линейных преобразований (на фиксированном уровне энергии), которое представляется в следующей форме:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \eta(\cos \theta \mathbf{M} - k \sin \theta \gamma), \quad \tilde{\gamma} = \delta(\sin \theta \mathbf{M} + k \cos \theta \gamma). \quad (22)$$

Параметры  $\theta$ ,  $\eta$ ,  $\delta$  можно подобрать таким образом, чтобы векторы  $\widetilde{\mathbf{M}}$ ,  $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$  стали ортонормированными.

Из условия ортогональности  $(\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}) = 0$  получим уравнение, определяющее угол  $\theta$  в следующем виде:

$$\operatorname{tg} 2\theta = -\frac{2kM_\gamma}{C - k^2}. \quad (23)$$

Два решения этого уравнения определяют углы  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , которые отличаются на  $\frac{\pi}{2}$ , т. е. векторы  $\widetilde{\mathbf{M}}$ ,  $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$  определены с точностью до перестановки. Из условий нормировки  $(\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\mathbf{M}}) = \widetilde{C}$ ,  $(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}) = 1$  находим параметры  $\eta$ ,  $\delta$ :

$$\eta = \sqrt{\widetilde{C}}(C \cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta - 2kM_\gamma \sin \theta \cos \theta)^{-1/2}, \quad \delta = (C \sin^2 \theta + k^2 \cos^2 \theta + 2kM_\gamma \cos \theta \sin \theta)^{-1/2}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Преобразование (12), которое используется в теореме 3 и сводит ненулевую константу площадей к нулевой в шаре Чаплыгина, устанавливая тем самым изоморфизм между двумя различными системами, является линейным по фазовым переменным, но с коэффициентами, зависящими от констант первых интегралов. Аналогичное преобразование встречается и в других системах. Например, преобразование Бобенко, которое связывает случай Клебша и Стеклова на различных алгебрах Ли (см. книгу [2]). В работе Фёдорова [8] это преобразование использовалось для интегрирования одной неголономной системы.

### 1.5. Бифуркационный анализ и устойчивость периодических решений

**Случай  $(M, \gamma) = 0$ .** В этом случае квадратуры (11) легко позволяют определить критические траектории системы и построить бифуркационную диаграмму. Бифуркационные значения интегралов  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{E}$  определяются из условия кратности корней полинома

$$R(x) = \varphi(x)((C - \mathcal{E}\mathcal{D})x - \mathcal{E}\mathcal{D}).$$

Отсюда находим три бифуркационные кривые на плоскости первых интегралов (см. рис. 2)

$$\mathcal{E} = A_i \mathcal{C}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (24)$$

Несложно показать, что им соответствуют периодические решения исходных уравнений (2) вида

$$\mathbf{M} = \pm \sqrt{\mathcal{C}} \mathbf{e}_i, \quad \boldsymbol{\gamma} = \cos \varphi \mathbf{e}_j + \sin \varphi \mathbf{e}_k, \quad \varphi = \pm A_i \sqrt{\mathcal{C}} t, \quad (25)$$

где  $\mathbf{e}_i$  — векторы главных динамических осей,  $i, j, k$  — циклическая перестановка чисел 1, 2, 3. Эти решения описывают равномерное качение шара по прямой, при котором вектор главной оси  $\mathbf{e}_i$  располагается параллельно плоскости, а вектор угловой скорости параллелен вектору  $\mathbf{M}$  и равен  $\boldsymbol{\omega} = \pm A_i \sqrt{\mathcal{C}} \mathbf{e}_i$ .

Соотношения (25) описывают шесть семейств (с учетом знака, определяющего направление вращения) критических траекторий системы, т. е. каждой прямой (24) на рисунке 2 соответствует два семейства.

Используя результаты работы [1], несложно построить бифуркационный комплекс этой системы (рис. 2б). Поскольку периодические решения интегрируемой конформно-гамильтоновой системы устойчивы тогда и только тогда, когда они лежат на краю бифуркационного комплекса, то в данном случае мы заключаем, что *имеется четыре семейства устойчивых периодических решений, определяемых кривыми  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ .*



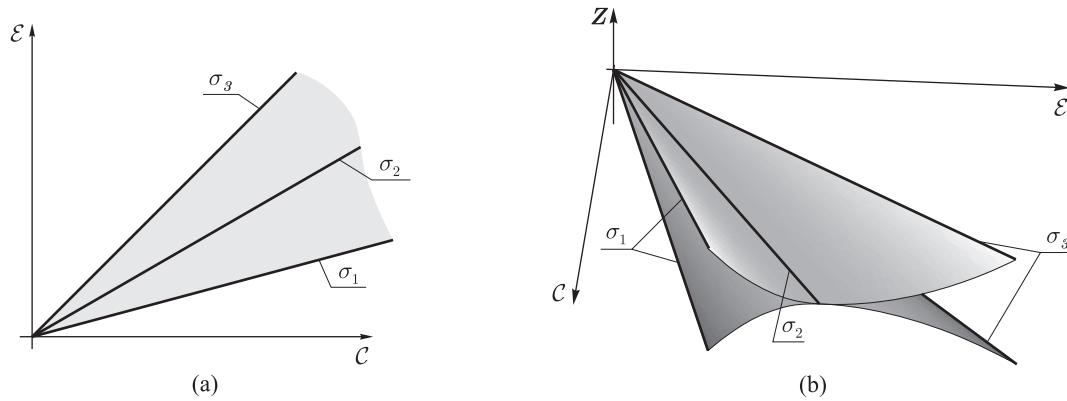


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма в случае  $(M, \gamma) = 0$  (полагаем, что  $A_1 < A_2 < A_3$ ).

**Случай  $(M, \gamma) \neq 0$ .** Вследствие того, что преобразование (22) определяет траекторную эквивалентность (различных систем), воспользуемся им, чтобы найти критические траектории при  $M_\gamma \neq 0$ .

Положим

$$(\widetilde{M}, \widetilde{\gamma}) = 0, \quad (\widetilde{M}, \widetilde{M}) = \widetilde{C}, \quad (\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}) = 1$$

и, используя соотношения (22), находим

$$\widetilde{E} = k^2 \eta^2 \mathcal{D}^{-1}, \quad \widetilde{C} = \frac{\eta^2}{2} (C + k^2 + (C - k^2) \cos 2\theta - 2kM_\gamma \sin 2\theta).$$

Пользуясь условием критичности траекторий (при  $(\widetilde{M}, \widetilde{\gamma}) = 0$ )

$$\widetilde{E} = A_i \widetilde{C}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (26)$$

и соотношением (23), после несложных упрощений получим уравнение, задающее бифуркационные кривые в общем случае, в форме

$$(k^2 - \mathcal{D}A_i C)(1 - \mathcal{D}A_i) = \mathcal{D}^2 A_i^2 M_\gamma^2.$$

Окончательно находим бифуркационные кривые, соответствующие прямым (26):

$$\sigma_i: \mathcal{E} = A_i C + \frac{A_i^2}{\mathcal{D}^{-1} - A_i} M_\gamma^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для того чтобы получить соответствующие критические решения, применим обратное преобразование  $\mathbf{Q}_\mathcal{E}^{-1}$  к критическим решениям (25):

$$\mathbf{M} = M_i \mathbf{e}_i + M_\perp (\cos \varphi \mathbf{e}_j + \sin \varphi \mathbf{e}_k), \quad \boldsymbol{\gamma} = \gamma_i \mathbf{e}_j + \gamma_\perp (\cos \varphi \mathbf{e}_j + \sin \varphi \mathbf{e}_k),$$

$$M_i^2 = \cos^2 \theta \frac{\widetilde{C}}{\eta^2}, \quad \gamma_i^2 = \sin^2 \theta \frac{\widetilde{C}}{\eta^2 k^2}, \quad M_\perp^2 = C - M_i^2, \quad \gamma_\perp^2 = 1 - \gamma_i^2.$$

Вследствие основного свойства преобразования  $\mathbf{Q}_\mathcal{E}$  угловая скорость пропорциональна исходной; используя соотношения (25) и (18), находим

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}(\mathbf{M} + Z\boldsymbol{\gamma}) = \Lambda A_i \mathbf{e}_i, \quad \Lambda = \pm \eta \cos \theta \sqrt{\widetilde{C}}.$$

Следовательно, для этих критических решений выполнено соотношение

$$\mathbf{M} + Z\boldsymbol{\gamma} = \Lambda \mathbf{e}_i.$$

Для того чтобы найти зависимость параметра данного решения через величины первых интегралов системы, последовательно умножим скалярно это уравнение на векторы  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$ ,  $\mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}$  и получим уравнения

$$\mathcal{C} + ZM_\gamma = \Lambda M_i, \quad M_\gamma + Z = \Lambda \gamma_i, \quad M_i + Z\gamma_i = \Lambda, \quad \mathcal{D}^{-1}Z = \Lambda A_i \gamma_i,$$

где мы воспользовались тождеством  $(\mathbf{A}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) + Z(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}) = \mathcal{D}^{-1}Z$ . Отсюда находим

$$\begin{aligned} \Lambda M_i &= \mathcal{C} + \frac{A_i}{\mathcal{D}^{-1} - A_i} M_\gamma^2, & \Lambda \gamma_i &= \frac{\mathcal{D}^{-1}}{\mathcal{D}^{-1} - A_i} M_\gamma, \\ \Lambda^2 &= \mathcal{C} + \frac{(2\mathcal{D}^{-1} - A_i)A_i}{(\mathcal{D}^{-1} - A_i)^2} M_\gamma^2, & Z &= \frac{A_i}{\mathcal{D}^{-1} - A_i} M_\gamma. \end{aligned}$$

Эти решения также описывают качение шара по прямой, но при этом вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ , направленный вдоль главной оси  $\mathbf{e}_i$ , постоянен в неподвижных осях и составляет с вертикалью угол  $\psi$ , который определяется соотношением

$$\cos \psi = (\mathbf{e}_i, \boldsymbol{\gamma}) = \gamma_i.$$

При этом каждому значению  $M_\gamma$  соответствует две критические траектории с разными знаками в выражении для  $\Lambda$ .

Помимо этих критических решений (когда векторы  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  не коллинеарны), при  $M_\gamma \neq 0$  система допускает критические решения, для которых выполнено

$$\mathbf{M} = \lambda \boldsymbol{\gamma}, \quad \lambda = M_\gamma = \text{const.}$$

Этим решениям соответствует бифуркационная кривая (точнее, поверхность), определяемая уравнением

$$\mathcal{C} = M_\gamma^2.$$

Динамика вектора  $\boldsymbol{\gamma}$  описывается уравнением Эйлера для движения свободного твердого тела с закрепленной точкой

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = M_\gamma \left(1 + \frac{\mathcal{E}\mathcal{D}}{\mathcal{C}}\right) \mathbf{A},$$

а траектория лежит на пересечении сферы и эллипсоида

$$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}) = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{C} + \mathcal{E}\mathcal{D}}.$$

Очевидно, данное пересечение задает на сфере Пуассона  $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$  две симметричные кривые; следовательно, каждому значению  $M_\gamma$  соответствуют две разные критические траектории.

Построим бифуркационную диаграмму на плоскости первых интегралов  $E = \frac{\mathcal{E}\mathcal{D}}{\mathcal{C}}$ ,  $g = \frac{M_\gamma}{\sqrt{\mathcal{C}}}$  (это эквивалентно тому, что заменой времени  $\sqrt{\mathcal{C}} dt \rightarrow dt$  мы приводим величину интеграла  $(\mathbf{M}, \mathbf{M})$  к единице). Она определяется пятью кривыми (см. рис. 3а)

$$\begin{aligned} \sigma_i: E &= b_i + \frac{b_i^2}{1 - b_i} g^2, \quad b_i = \mathcal{D}A_i = \frac{\mathcal{D}}{I_i + \mathcal{D}}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \sigma_4: g &= 1, \quad \sigma_5: g = -1, \end{aligned}$$

причем постоянные  $0 < b_i < 1$ .

Как и в случае  $(M, \gamma) = 0$ , для построения бифуркационного комплекса воспользуемся теоремой о том, что все устойчивые периодические решения лежат на краю бифуркационного комплекса. Соответствующий бифуркационный комплекс приведен на рисунке 3b. Учитывая, что каждой точке всех бифуркационных кривых соответствует две критические траектории, заключаем, что в данном случае имеется 8 семейств устойчивых периодических решений, определяемых кривыми  $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$  и лежащих на четырех листах бифуркационного комплекса. Эти листы склеиваются друг с другом по кривой  $\sigma_2$ , на которой лежат неустойчивые критические траектории и соединяющие их неустойчивые инвариантные многообразия (сепаратрисы). Из семейств, соответствующих кривым  $\sigma_4, \sigma_5$ , нужно исключить по одной точке, лежащей на пересечении с кривой  $\sigma_2$  и определяющей неустойчивое положение равновесия.

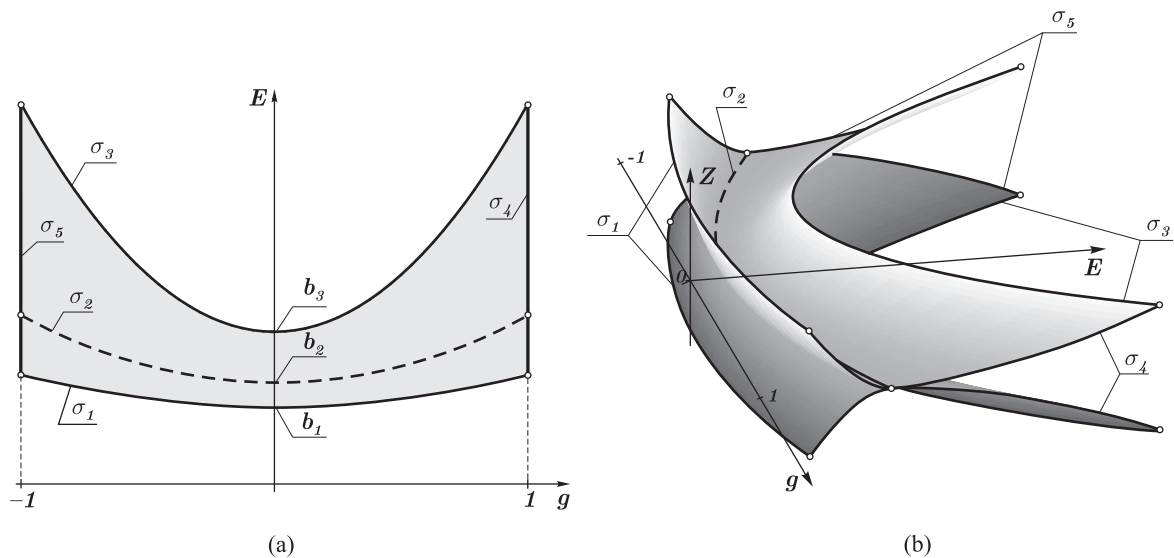


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма на плоскости интегралов  $g, E$  при  $b_1 < b_2 < b_3$ .

## 2. Твердое тело в шаровом подвесе

### 2.1. Уравнения движения, первые интегралы, инвариантная мера

Интегрируемым обобщением задачи о качении шара Чаплыгина является предложенная Ю. Н. Фёдоровым в [7] задача о движении тела в шаровом подвесе. Эта система состоит из тела, жестко заключенного в сферическую оболочку, так что центр масс обоих тел совпадает с геометрическим центром оболочки, и произвольного количества динамически симметричных шаров, соприкасающихся с оболочкой (рис. 4), причем в точках касания проскальзывание отсутствует. Центры шаров и оболочки неподвижны в пространстве; в дальнейшем тело в оболочке для краткости будем называть центральным шаром.

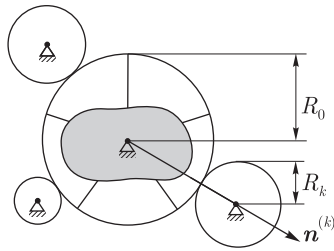


Рис. 4.

Условия отсутствия проскальзывания состоят в том, что скорости точек соприкосновения различных шаров совпадают, они представляются в форме векторных уравнений вида

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(k)} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}^{(k)} + r_k \boldsymbol{\omega}^{(k)} \times \mathbf{n}^{(k)} = 0, \\ k &= 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $N$  — число шаров, примыкающих к центральному,  $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}^{(k)}$  — угловые скорости соответствующих шаров,  $\mathbf{n}^{(k)}$  — неподвижные в пространстве единичные векторы в направлении из центра оболочки в точки контакта,  $r_k = \frac{R_k}{R_0}$  — отношение радиусов шаров (рис. 4).

Выберем подвижную систему координат, связанную с главными осями инерции центрального шара. Уравнения движения шаров могут быть получены из уравнений Ферерса с неопределенными множителями:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right)^{\cdot} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \sum_{k,i} \mathcal{N}_i^{(k)} \frac{\partial f_i^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}^{(k)}} \right)^{\cdot} = \left( \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}^{(k)}} \right) \times \boldsymbol{\omega} + \mathcal{N}_i^{(k)} \frac{\partial f_i^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\omega}^{(k)}},$$

где  $T$  — кинетическая энергия свободной системы

$$T = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} \sum_k \mu_k (\boldsymbol{\omega}^{(k)}, \boldsymbol{\omega}^{(k)}), \quad (28)$$

здесь  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  — тензор инерции центрального шара,  $\mu_k$  — моменты инерции примыкающих динамически симметричных шаров,  $\mathcal{N}_i^{(k)}$  — неопределенные множители, т. е. реакции связей.

Дополняя эти уравнения кинематическими соотношениями, описывающими эволюцию координат неподвижных векторов  $\mathbf{n}^{(k)}$  в подвижных осях, получим систему

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \sum_k \mathbf{n}^{(k)} \times \mathcal{N}^{(k)}, \quad \mu_k \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(k)} = \mu_k \boldsymbol{\omega}^{(k)} \times \boldsymbol{\omega} + r_k \mathbf{n}^{(k)} \times \mathcal{N}^{(k)}, \\ \dot{\mathbf{n}}^{(k)} &= \mathbf{n}^{(k)} \times \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\mathcal{N}^{(k)} = (\mathcal{N}_1^{(k)}, \mathcal{N}_2^{(k)}, \mathcal{N}_3^{(k)})$ .



Используя эти уравнения, несложно показать, что проекции угловых скоростей  $\omega^{(k)}$  на векторы  $\mathbf{n}^{(k)}$  сохраняются, т. е. являются первыми интегралами

$$\Lambda_k = (\omega^{(k)}, \mathbf{n}^{(k)}) = \text{const.} \quad (30)$$

При помощи этих интегралов исключим реакции связей  $\mathcal{N}^{(k)}$  и получим замкнутую систему, описывающую динамику центрального шара, для этого домножим связи (27) векторно на  $\mathbf{n}^{(k)}$  и получим

$$\omega^{(k)} = -\frac{1}{r_k}(\omega - (\omega, \mathbf{n}^{(k)})\mathbf{n}^{(k)}) + \Lambda_k \mathbf{n}^{(k)}.$$

Дифференцируя это соотношение и подставляя в (29), окончательно находим

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\dot{\omega} + \sum_k \frac{\mu_k}{r_k^2}(\dot{\omega} - (\dot{\omega}, \mathbf{n}^{(k)})\mathbf{n}^{(k)}) &= \mathbf{I}\omega \times \omega, \\ \dot{\mathbf{n}}^{(k)} &= \mathbf{n}^{(k)} \times \omega. \end{aligned} \quad (31)$$

Определим вектор

$$\mathbf{M} = \left( \mathbf{I} + \sum_k \frac{\mu_k}{r_k^2} \mathbf{E} \right) \omega - \sum_k \frac{\mu_k}{r_k^2} (\omega, \mathbf{n}^{(k)}) \mathbf{n}^{(k)} = \left( \mathbf{I} + \sum_k \frac{\mu_k}{r_k^2} \mathbf{E} - \sum_k \frac{\mu_k}{r_k^2} \mathbf{n}^{(k)} \otimes \mathbf{n}^{(k)} \right) \omega,$$

где  $\mathbf{E}$  — единичная матрица,  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \|a_i b_j\|$ ; используя (31), находим, что эволюция  $\mathbf{M}$  определяется уравнением

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \omega,$$

следовательно,  $\mathbf{M}$  неподвижен в пространстве.

В неподвижной системе координат тензор

$$\mathcal{D} = \sum_k \frac{\mu_k}{r_k^2} \mathbf{n}^{(k)} \otimes \mathbf{n}^{(k)}$$

представляется симметричной матрицей с постоянными коэффициентами. Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  — базис собственных (неподвижных в пространстве) векторов этой матрицы, так что

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_\alpha^{(0)} \alpha \otimes \alpha + \mathcal{D}_\beta^{(0)} \beta \otimes \beta + \mathcal{D}_\gamma^{(0)} \gamma \otimes \gamma = \mathcal{D}_\gamma^{(0)} \mathbf{E} + (\mathcal{D}_\alpha^{(0)} - \mathcal{D}_\gamma^{(0)}) \alpha \otimes \alpha + (\mathcal{D}_\beta^{(0)} - \mathcal{D}_\gamma^{(0)}) \beta \otimes \beta,$$

где  $\mathcal{D}_\alpha^{(0)}, \mathcal{D}_\beta^{(0)}, \mathcal{D}_\gamma^{(0)}$  — собственные значения тензора  $\mathcal{D}$ .

Окончательно представим уравнения движения центрального шара в подвижных осях в форме замкнутой системы девяти уравнений вида

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \omega, \quad \dot{\alpha} = \alpha \times \omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \omega, \quad (32)$$

где угловая скорость  $\omega$  выражается через векторы  $\mathbf{M}, \alpha, \beta$  при помощи линейных соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (\mathbf{J} - \mathcal{D}_\alpha \alpha \otimes \alpha - \mathcal{D}_\beta \beta \otimes \beta) \omega, \\ \mathbf{J} &= \mathbf{I} + \sum_k \frac{\mu_k}{r_k^2} \mathbf{E} - \mathcal{D}_\gamma^{(0)} \mathbf{E}, \quad \mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D}_\alpha^{(0)} - \mathcal{D}_\gamma^{(0)}, \quad \mathcal{D}_\beta = \mathcal{D}_\beta^{(0)} - \mathcal{D}_\gamma^{(0)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Чтобы замкнуть уравнения (32), необходимо выразить угловую скорость из соотношения (33); можно показать, что  $\omega$  представляется в форме (см. для сравнения (13))

$$\omega = \mathbf{A}(\mathbf{M} + Z_\alpha \alpha + Z_\beta \beta), \quad \mathbf{A} = \mathbf{J}^{-1},$$

$$\begin{pmatrix} Z_\alpha \\ Z_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_\alpha^{-1} - (\alpha, \mathbf{A}\alpha) & -(\alpha, \mathbf{A}\beta) \\ -(\alpha, \mathbf{A}\beta) & \mathcal{D}_\beta^{-1} - (\beta, \mathbf{A}\beta) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y_\alpha \\ Y_\beta \end{pmatrix}, \quad (34)$$

где  $Y_\alpha = (\mathbf{A}\mathbf{M}, \alpha)$ ,  $Y_\beta = (\mathbf{A}\mathbf{M}, \beta)$ .

Уравнения (32) допускают следующие (очевидные) первые интегралы:

— геометрические

$$\alpha^2 = 1, \quad \beta^2 = 1, \quad (\alpha, \beta) = 0, \quad (35)$$

— проекции момента на неподвижные оси

$$(\mathbf{M}, \alpha) = \text{const}, \quad (\mathbf{M}, \beta) = \text{const}, \quad (\mathbf{M}, \gamma) = (\mathbf{M}, \alpha \times \beta) = \text{const}, \quad (36)$$

— энергия

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \omega). \quad (37)$$

Интегралы (36) являются аналогами постоянной площадей  $F_2$  в задаче Чаплыгина (5).

ЗАМЕЧАНИЕ. Система (32) допускает также интеграл квадрата момента

$$(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = (\mathbf{M}, \alpha)^2 + (\mathbf{M}, \beta)^2 + (\mathbf{M}, \alpha \times \beta)^2 = \text{const}.$$

Кроме того, уравнения (32) допускают также инвариантную меру  $\rho d\mathbf{M} d\alpha d\beta$  с плотностью

$$\rho = [\det(\mathbf{J} - \mathcal{D}_\alpha \alpha \otimes \alpha - \mathcal{D}_\beta \beta \otimes \beta)]^{-1/2}. \quad (38)$$

Следовательно, согласно теореме Эйлера–Якоби, эта система интегрируема.

## 2.2. Подвес с резиновыми шарами

Как известно, в робототехнике помимо систем со связями (27), исключающими проскальзывание, рассматриваются и системы, в которых кроме проскальзывания запрещается также прокручивание в точке контакта тел. В этом случае для шарового подвеса полная система связей в обозначениях раздела 2.1 записывается в форме

$$\mathbf{f}^{(k)} = \omega \times \mathbf{n}^{(k)} + r_k \omega^{(k)} \times \mathbf{n}^{(k)} = 0, \quad \mathbf{g}^{(k)} = (\omega - \omega^{(k)}, \mathbf{n}^{(k)}) = 0. \quad (39)$$

Модель качения без проскальзывания и верчения, для которой соприкасающиеся поверхности удовлетворяют связям (39), предложена в работах [10, 16], где авторы называют ее, более образно, моделью качения резинового тела. Шаровой подвес с резиновыми шарами впервые был рассмотрен в работе [14], где показана его интегрируемость по Эйлеру–Якоби. Здесь мы покажем, что рассматриваемая задача не является новой, а сводится к предыдущей.

Записывая в системе главных осей инерции центрального шара уравнения Ферерса с кинетической энергией (28), получим систему

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \sum_k \mathbf{n}^{(k)} \times \mathbf{N}^{(k)} + \sum_k \lambda_k \mathbf{n}^{(k)}, \\ \mu_k \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(k)} &= \mu_k \boldsymbol{\omega}^{(k)} \times \boldsymbol{\omega} + r_k \mathbf{n}^{(k)} \times \mathbf{N}^{(k)} - \lambda_k \mathbf{n}^{(k)}, \\ \dot{\mathbf{n}}^{(k)} &= \mathbf{n}^{(k)} \times \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (40)$$

где  $\lambda_k$  — неопределенные множители связей  $g^{(k)} = 0$ .

Из уравнений связей (39) находим

$$\boldsymbol{\omega}^{(k)} = -\frac{1}{r_k} \boldsymbol{\omega} + \left(1 + \frac{1}{r_k}\right) (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}^{(k)}) \mathbf{n}^{(k)} \quad (41)$$

и как следствие этого уравнения и уравнений движения (40) получим соотношение

$$(\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{n}}^{(k)}) = (\boldsymbol{\omega}^{(k)}, \dot{\mathbf{n}}^{(k)}) = 0, \quad (\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{n}^{(k)}) = (\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(k)}, \mathbf{n}^{(k)}). \quad (42)$$

Пользуясь соотношениями (40), (41) и (42), выразим неопределенные множители в виде

$$\begin{aligned} \lambda_k &= -\mu_k (\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{n}^{(k)}), \\ \mathbf{n}^{(k)} \times \mathbf{N}^{(k)} &= -\frac{\mu_k}{r_k^2} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \frac{\mu_k}{r_k} \left(1 + \frac{1}{r_k}\right) (\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{n}^{(k)}) \mathbf{n}^{(k)} + \frac{\lambda_k}{r_k} \mathbf{n}^{(k)}. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, получим замкнутую систему, описывающую динамику центрального шара

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_k \frac{\mu_k}{r_k^2} \dot{\boldsymbol{\omega}} - \sum_k \mu_k \left(\frac{1}{r_k^2} - 1\right) (\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{n}^{(k)}) \mathbf{n}^{(k)} &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\mathbf{n}}^{(k)} &= \mathbf{n}^{(k)} \times \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

По аналогии с обычным шаровым подвесом определим вектор

$$\mathbf{M} = \left( \mathbf{I} + \sum_k \frac{\mu_k}{r_k^2} \mathbf{E} - \sum_k \mu_k \left(\frac{1}{r_k^2} - 1\right) \mathbf{n}^{(k)} \otimes \mathbf{n}^{(k)} \right) \boldsymbol{\omega}$$

и симметрический тензор

$$\mathbf{D}' = \sum_k \mu_k \left(\frac{1}{r_k^2} - 1\right) \mathbf{n}^{(k)} \otimes \mathbf{n}^{(k)},$$

компоненты которых, как несложно показать, являются постоянными в неподвижных осях.

В абсолютном пространстве выберем базис собственных векторов  $\mathbf{D}'$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}' &= \mathcal{D}'_{\alpha}^{(0)} \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\alpha} + \mathcal{D}'_{\beta}^{(0)} \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta} + \mathcal{D}'_{\gamma}^{(0)} \boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\gamma} = \mathcal{D}'_{\gamma}^{(0)} \mathbf{E} + \mathcal{D}'_{\alpha}^{(0)} \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\alpha} + \mathcal{D}'_{\beta}^{(0)} \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta} \\ \mathcal{D}'_{\alpha} &= \mathcal{D}'_{\alpha}^{(0)} - \mathcal{D}'_{\gamma}^{(0)}, \quad \mathcal{D}'_{\beta} = \mathcal{D}'_{\beta}^{(0)} - \mathcal{D}'_{\gamma}^{(0)}; \end{aligned}$$

тогда уравнения движения центрального шара в резиновом шаровом подвесе представляются в форме

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (\mathbf{J}' - \mathcal{D}'_{\alpha} \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\alpha} - \mathcal{D}'_{\beta} \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{J}' &= \mathbf{I} + \left( \sum_k \frac{\mu_k}{r_k^2} - \mathcal{D}'_{\gamma}{}^{(0)} \right) \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Таким образом, задача о движении тела в шаровом подвесе с резиновыми шарами эквивалентна задаче о движении тела в обычном шаровом подвесе. (Отличие возникает лишь в законе движения однородных шаров, удерживающих центральный шар.)

### 2.3. Гиростат в шаровом подвесе

Рассмотрим обобщение задачи о теле в шаровом подвесе на случай, когда к центральному шару прикреплен уравновешенный ротор, вращающийся с постоянной скоростью  $\omega_r$  вокруг оси, фиксированной в теле. Такую систему будем называть гиростатом в шаровом подвесе. При этом кинетическая энергия свободной системы представляется в виде

$$T = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{K}, \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} \sum_k \mu_k (\boldsymbol{\omega}^{(k)}, \boldsymbol{\omega}^{(k)}) + \frac{1}{2} I_r \omega_r^2,$$

где  $\mathbf{K} = I_r \omega_r \mathbf{e}_r$  — вектор гиростатического момента, направлен вдоль оси ротора, направление которой определяется неподвижным в теле вектором  $\mathbf{e}_r$ ,  $I_r$  — момент инерции ротора относительно этой оси, а  $\mathbf{I}$  — тензор инерции всей системы шар + ротор.

Повторяя рассуждения предыдущего раздела, можно показать, что уравнения движения этой системы представляются в форме

$$\dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{M} + \mathbf{K}) \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega},$$

где  $\mathbf{M}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  также связаны соотношениями (33), (34), т. е.

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}(\mathbf{M} + Z_{\alpha} \boldsymbol{\alpha} + Z_{\beta} \boldsymbol{\beta}).$$

Эти уравнения допускают семь независимых первых интегралов:

— геометрические

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = 1, \quad \boldsymbol{\beta}^2 = 1, \quad (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0,$$

— проекции обобщенного момента на неподвижные оси

$$(\mathbf{M} + \mathbf{K}, \boldsymbol{\alpha}) = \text{const}, \quad (\mathbf{M} + \mathbf{K}, \boldsymbol{\beta}) = \text{const}, \quad (\mathbf{M} + \mathbf{K}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) = \text{const},$$

— энергия

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M} + \mathbf{K}, \boldsymbol{\omega}).$$

Эти уравнения также допускают инвариантную меру  $\rho d\mathbf{M} d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\beta}$  с плотностью  $\rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ , определяемой уравнением (38).

Таким образом, согласно теореме Эйлера–Якоби система является интегрируемой.





ЗАМЕЧАНИЕ. Постоянный гиростатический момент может возникать и в отсутствие ротора, в случае если тело содержит неодносвязные полости, заполненные идеальной жидкостью, течение которой обладает ненулевой циркуляцией [6].

## 2.4. Шаровой подвес в случае $M \parallel \beta$

Зафиксируем в системе (32) значения двух «постоянных площадей» равными нулю, без ограничения общности можно положить

$$(M, \alpha) = 0, \quad (M, \gamma) = (M, \alpha \times \beta) = 0. \quad (43)$$

Тогда справедливо соотношение

$$M = s\sqrt{C}\beta,$$

где  $(M, M) = C$  — величина квадрата момента,  $s = \pm 1$  в зависимости от взаимных направлений векторов  $M$  и  $\beta$ . Используя это равенство, на уровне интеграла энергии (37)  $2H = \mathcal{E}$  получим

$$(\beta \otimes \beta)\omega = \frac{\mathcal{E}}{C}M.$$

Подставим это соотношение в определение вектора  $M$  (33) и введем новый вектор момента

$$\widetilde{M} = \left(1 + \frac{\mathcal{E}\mathcal{D}_\beta}{C}\right)M = (J - \mathcal{D}_\alpha \alpha \otimes \alpha)\omega.$$

Опираясь на это равенство, заключаем, что справедливо следующее

**Предложение 1.** Система (33), описывающая движение твердого тела в шаровом подвесе, при условиях (43) и фиксированных значениях интегралов  $(M, M) = C$  и  $(M, \omega) = \mathcal{E}$  при помощи преобразования

$$\widetilde{M} = \left(1 + \frac{\mathcal{E}\mathcal{D}_\beta}{C}\right)M, \quad \widetilde{\gamma} = \alpha$$

отображается в систему для шара Чаплыгина

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{M}} &= \widetilde{M} \times \widetilde{\omega}, \quad \dot{\widetilde{\gamma}} = \widetilde{\gamma} \times \widetilde{\omega}, \\ \widetilde{\omega} &= \omega = A \left( \widetilde{M} + \frac{(A\widetilde{M}, \widetilde{\gamma})}{\mathcal{D}_\alpha^{-1} - (\widetilde{\gamma}, A\widetilde{\gamma})} \widetilde{\gamma} \right), \quad A = J^{-1} \end{aligned}$$

при фиксированных значениях интегралов

$$\widetilde{C} = (\widetilde{M}, \widetilde{M}) = C \left(1 + \frac{\mathcal{E}\mathcal{D}_\beta}{C}\right)^2, \quad \widetilde{\mathcal{E}} = (\widetilde{M}, \widetilde{\omega}) = \mathcal{E} \left(1 + \frac{\mathcal{E}\mathcal{D}_\beta}{C}\right), \quad (\widetilde{M}, \widetilde{\gamma}) = 0. \quad (44)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда одна из «постоянных площадей» равна нулю, задача о движении тела в шаровом подвесе также сводится к задаче о качении шара Чаплыгина, но при произвольной постоянной площадей. Хотя это нигде ниже не используется, укажем это преобразование; для определенности положим

$$(M, \gamma) = 0, \quad \text{т. е. } M = M_\alpha \alpha + M_\beta \beta.$$

Воспользуемся следующим фактом тензорной алгебры: для всякого вектора  $\mathbf{M}$  существует вектор  $\boldsymbol{\eta}$ , такой, что справедливо равенство

$$\mathbf{D}_{\alpha\beta} = \mathcal{D}_\alpha \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\alpha} + \mathcal{D}_\beta \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta} = \mathcal{D}_M \mathbf{M} \otimes \mathbf{M} + \mathcal{D}_\eta \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta}.$$

Действительно, подействуем оператором  $\mathbf{D}_{\alpha\beta}$  на векторы  $\mathbf{D}_{\alpha\beta}^{-1} \mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}_{\alpha\beta}^{-1} \boldsymbol{\eta}$ , получим следующие соотношения для определения вектора  $\boldsymbol{\eta}$  и коэффициентов  $\mathcal{D}_M$ ,  $\mathcal{D}_\eta$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}, \mathbf{D}_{\alpha\beta}^{-1} \boldsymbol{\eta}) &= 0, \\ \mathcal{D}_M &= (\mathbf{M}, \mathbf{D}_{\alpha\beta}^{-1} \mathbf{M})^{-1}, \quad \mathcal{D}_\eta = (\boldsymbol{\eta}, \mathbf{D}_{\alpha\beta}^{-1} \boldsymbol{\eta})^{-1}. \end{aligned}$$

Положим для определенности

$$\boldsymbol{\eta} = \mathcal{D}_\alpha M_\beta \boldsymbol{\alpha} - \mathcal{D}_\beta M_\alpha \boldsymbol{\beta},$$

тогда, используя соотношение (33), можно показать, что на уровне интеграла  $\mathcal{E} = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega})$  отображение

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} &= k^{-1} \boldsymbol{\eta}, \quad \tilde{\mathbf{M}} = (1 + \mathcal{E} \mathcal{D}_M) \mathbf{M} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} - \mathcal{D}_\eta k^2 \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \otimes \tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \quad k^2 = \mathcal{D}_\alpha^2 M_\beta^2 + \mathcal{D}_\beta^2 M_\alpha^2, \\ \mathcal{D}_M &= \mathcal{D}_\eta \mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta, \quad \mathcal{D}_\eta = (\mathcal{D}_\alpha M_\beta^2 + \mathcal{D}_\beta M_\alpha^2)^{-1} \end{aligned}$$

сводит систему к задаче о шаре Чаплыгина на совместном уровне интегралов

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) &= k^{-1} (1 + \mathcal{E} \mathcal{D}_M) (\mathcal{D}_\alpha - \mathcal{D}_\beta) M_\alpha M_\beta, \quad \tilde{\mathcal{C}} = (1 + \mathcal{E} \mathcal{D}_M)^2 \mathcal{C}, \\ \tilde{\mathcal{E}} &= (1 + \mathcal{E} \mathcal{D}_M) \mathcal{E}. \end{aligned}$$

## 2.5. Линейный траекторный изоморфизм

Как следует из уравнений (32), векторы  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  постоянны в неподвижной системе координат, поэтому их линейные комбинации с постоянными (на траекториях) коэффициентами также остаются неподвижны и подчиняются таким же уравнениям:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= m_1 \mathbf{M} + m_2 \boldsymbol{\alpha} + m_3 \boldsymbol{\beta}, \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = a_1 \mathbf{M} + a_2 \boldsymbol{\alpha} + a_3 \boldsymbol{\beta}, \quad \tilde{\boldsymbol{\beta}} = b_1 \mathbf{M} + b_2 \boldsymbol{\alpha} + b_3 \boldsymbol{\beta}, \\ \dot{\tilde{\mathbf{M}}} &= \tilde{\mathbf{M}} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}} = \tilde{\boldsymbol{\beta}} \times \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (45)$$

Кроме того, как и в случае преобразования Чаплыгина, потребуем, чтобы трансформированная угловая скорость определялась через векторы  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  аналогично исходной (34) с учетом замены

$$\mathcal{D}_\alpha \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_\alpha, \quad \mathcal{D}_\beta \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_\beta.$$

Зафиксируем уровень интеграла энергии (37)  $2H = \mathcal{E}$  и определим для трехмерных векторов метрику

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathcal{E} x_1 y_1 + \mathcal{D}_\alpha^{-1} x_2 y_2 + \mathcal{D}_\beta^{-1} x_3 y_3, \quad (46)$$

тогда справедлива следующая

**Теорема 4.** Если на фиксированном уровне интеграла энергии  $2H = \mathcal{E}$  строки матрицы, составленные из коэффициентов преобразования (45)

$$\mathbf{Q}_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix},$$

взаимно ортогональны относительно метрики (46) и постоянные  $\tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ ,  $\tilde{\mathcal{D}}_\beta$  определяются как

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{m}, \mathbf{a} \rangle &= \langle \mathbf{m}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0, \\ \tilde{\mathcal{D}}_\alpha^{-1} &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle, \quad \tilde{\mathcal{D}}_\beta^{-1} = \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle,\end{aligned}\quad (47)$$

то векторы  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  пропорциональны:

$$\boldsymbol{\omega} = \lambda \tilde{\boldsymbol{\omega}},$$

где  $\lambda$  — функция векторов  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ , а  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  выражается через  $\tilde{\mathbf{M}}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$  по формуле, аналогичной (34).

*Доказательство.* Мы не будем приводить здесь полные выкладки (они могут быть выполнены при помощи какой-либо системы аналитических вычислений, например, Maple, Mathematica и т. п.), укажем лишь основные этапы доказательства.

Обозначим элементы матрицы в формуле (34) следующим образом:

$$X_{\alpha\alpha} = \mathcal{D}_\alpha^{-1} - (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}), \quad X_{\beta\beta} = \mathcal{D}_\beta^{-1} - (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}), \quad X_{\alpha\beta} = -(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}). \quad (48)$$

На уровне интеграла энергии  $2H = \mathcal{E}$  выполнено соотношение

$$(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \mathcal{E} - (\mathbf{Y}, \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}),$$

где  $\mathbf{X} = \|X_{\mu\nu}\|$  —  $2 \times 2$ -матрица, составленная из элементов (48),  $\mathbf{Y} = (Y_\alpha, Y_\beta)$  — двумерный вектор.

Из условия сохранения вида зависимости  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\boldsymbol{\beta}})$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = A(\tilde{\mathbf{M}} + \tilde{Z}_\alpha \tilde{\boldsymbol{\alpha}} + \tilde{Z}_\beta \tilde{\boldsymbol{\beta}}), \quad \tilde{Z} = \tilde{\mathbf{X}}^{-1} \tilde{\mathbf{Y}},$$

используя преобразования (45), с учетом соотношений (47) получим

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{\alpha\alpha} &= \tilde{\mathcal{D}}_\alpha^{-1} - (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{A}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = a_1^2(\mathbf{Y}, \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}) + a_2^2 X_{\alpha\alpha} + a_3^2 X_{\beta\beta} + 2a_2 a_3 X_{\alpha\beta} - 2a_1 a_2 Y_\alpha - 2a_1 a_3 Y_\beta, \\ \tilde{X}_{\beta\beta} &= \tilde{\mathcal{D}}_\beta^{-1} - (\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{A}\tilde{\boldsymbol{\beta}}) = b_1^2(\mathbf{Y}, \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}) + b_2^2 X_{\alpha\alpha} + b_3^2 X_{\beta\beta} + 2b_2 b_3 X_{\alpha\beta} - 2b_1 b_2 Y_\alpha - 2b_1 b_3 Y_\beta, \\ \tilde{X}_{\alpha\beta} &= -(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{A}\tilde{\boldsymbol{\beta}}) = a_1 b_1(\mathbf{Y}, \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}) + a_2 b_2 X_{\alpha\alpha} + a_3 b_3 X_{\beta\beta} + (a_2 b_3 + a_3 b_2) X_{\alpha\beta} - \\ &\quad - (a_1 b_2 + a_2 b_1) Y_\alpha - (a_1 b_3 + a_3 b_1) Y_\beta, \\ \tilde{Y}_\alpha &= -(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = m_1 a_1(\mathbf{Y}, \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}) + m_2 a_2 X_{\alpha\alpha} + m_3 a_3 X_{\beta\beta} + (m_2 a_3 + m_3 a_2) X_{\alpha\beta} - \\ &\quad - (m_1 a_2 + m_2 a_1) Y_\alpha - (m_1 a_3 + m_3 a_1) Y_\beta, \\ \tilde{Y}_\beta &= (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}) = m_1 b_1(\mathbf{Y}, \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}) + m_2 b_2 X_{\alpha\alpha} + m_3 b_3 X_{\beta\beta} + (m_2 b_3 + m_3 b_2) X_{\alpha\beta} - \\ &\quad - (m_1 b_2 + m_2 b_1) Y_\alpha - (m_1 b_3 + m_3 b_1) Y_\beta.\end{aligned}$$

Отметим, что условия (47), как и в случае шара Чаплыгина, приводят к тому, что  $\tilde{\mathbf{X}}$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}$  являются однородными функциями  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .

Поскольку условия пропорциональности векторов  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  эквивалентны условию пропорциональности векторов  $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{J}\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ , вычислим эти векторы в неподвижном базисе  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{M} + Z_\alpha \boldsymbol{\alpha} + Z_\beta \boldsymbol{\beta} = (M_\alpha + Z_\alpha) \boldsymbol{\alpha} + (M_\beta + Z_\beta) \boldsymbol{\beta} + M_\gamma \boldsymbol{\gamma}, \\ \mathbf{J}\tilde{\boldsymbol{\omega}} &= \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{Z}_\alpha \tilde{\boldsymbol{\alpha}} + \tilde{Z}_\beta \tilde{\boldsymbol{\beta}} = \lambda^{-1} [(M_\alpha + Z_\alpha) \boldsymbol{\alpha} + (M_\beta + Z_\beta) \boldsymbol{\beta} + M_\gamma \boldsymbol{\gamma}], \\ Z_\alpha &= \frac{X_{\beta\beta} Y_\alpha - X_{\alpha\beta} Y_\beta}{X_{\alpha\alpha} X_{\beta\beta} - X_{\alpha\beta}^2}, \quad Z_\beta = \frac{X_{\alpha\alpha} Y_\beta - X_{\alpha\beta} Y_\alpha}{X_{\alpha\alpha} X_{\beta\beta} - X_{\alpha\beta}^2},\end{aligned}$$

где  $M_\alpha = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha})$ ,  $M_\beta = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\beta})$ ,  $M_\gamma = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$ ,

$$\lambda = \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{\det \mathbf{Q}_\mathcal{E}} + \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{\det \mathbf{Q}_\mathcal{E}} Z_\alpha + \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\det \mathbf{Q}_\mathcal{E}} Z_\beta;$$

кроме того, величины  $\tilde{Z}_\alpha, \tilde{Z}_\beta$  связаны с  $Z_\alpha, Z_\beta$  следующим линейным преобразованием:

$$\begin{aligned} Z_\alpha &= \lambda(m_2 + a_2\tilde{Z}_\alpha + b_2\tilde{Z}_\beta), \\ Z_\beta &= \lambda(m_3 + a_3\tilde{Z}_\alpha + b_3\tilde{Z}_\beta). \end{aligned}$$

■

Таким образом, как и выше, векторное поле преобразованной системы отличается от векторного поля исходной системы (32) скалярным множителем

$$\dot{\tilde{\mathbf{M}}} = \lambda \tilde{\mathbf{M}} \times (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{M}} + \tilde{Z}_\alpha \tilde{\boldsymbol{\alpha}} + \tilde{Z}_\beta \tilde{\boldsymbol{\beta}}), \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}} = \lambda \tilde{\boldsymbol{\alpha}} (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{M}} + \tilde{Z}_\alpha \tilde{\boldsymbol{\alpha}} + \tilde{Z}_\beta \tilde{\boldsymbol{\beta}}), \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}} = \lambda \tilde{\boldsymbol{\beta}} (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{M}} + \tilde{Z}_\alpha \tilde{\boldsymbol{\alpha}} + \tilde{Z}_\beta \tilde{\boldsymbol{\beta}}),$$

а новый уровень интеграла энергии, как можно проверить с помощью соотношений (47), определяется уравнением

$$\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) = \mathcal{E}m_1^2 + D_\alpha^{-1}m_2^2 + D_\beta^{-1}m_3^2 = \langle \mathbf{m}, \mathbf{m} \rangle.$$

## 2.6. Приведение к нулевым «постоянным площадей»

Покажем, что с помощью преобразования  $\mathbf{Q}_\mathcal{E}$ , описанного в предыдущем разделе, можно выбрать новые векторы  $\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}$  взаимно ортогональными:

$$(\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = (\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}) = (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}) = 0. \quad (49)$$

(При этом их нормировки на первом этапе можно не требовать.)

Пусть  $\mathbf{\Gamma}$  — матрица Грамма исходных векторов  $\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  и  $\mathbf{g}$  — матрица метрики  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ :

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{vmatrix} \mathcal{C} & M_\alpha & M_\beta \\ M_\alpha & 1 & 0 \\ M_\beta & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{vmatrix} \mathcal{E} & 0 & 0 \\ 0 & D_\alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & D_\beta^{-1} \end{vmatrix}, \quad (50)$$

где  $M_\alpha = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha})$ ,  $M_\beta = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\beta})$ ,  $\mathcal{C} = (\mathbf{M}, \mathbf{M})$ .

**Предложение 2.** Пусть  $\mathbf{B} = (\mathbf{g}^{-1})^T$  и  $\mathbf{m}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$  — ее собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям:

$$\mathbf{B}\mathbf{m} = \lambda_m \mathbf{m}, \quad \mathbf{B}\mathbf{a} = \lambda_a \mathbf{a}, \quad \mathbf{B}\mathbf{b} = \lambda_b \mathbf{b}. \quad (51)$$

Тогда матрица  $\mathbf{Q}_\mathcal{E}$  преобразования (45), строки которой состоят из элементов векторов  $\mathbf{m}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ , удовлетворяет одновременно условиям (47) и условиям (49).

*Доказательство.* Требование (49) совместно с условиями (47) приводит к следующим матричным равенствам, которым должна удовлетворять матрица  $\mathbf{Q}_\mathcal{E}$ :

$$\mathbf{Q}_\mathcal{E} \mathbf{\Gamma} \mathbf{Q}_\mathcal{E}^T = \tilde{\mathbf{\Gamma}}, \quad \mathbf{Q}_\mathcal{E} \mathbf{g} \mathbf{Q}_\mathcal{E}^T = \tilde{\mathbf{g}}, \quad (52)$$

где  $\tilde{\mathbf{\Gamma}} = \text{diag}(\tilde{\mathbf{M}}^2, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^2, \tilde{\boldsymbol{\beta}}^2)$ ,  $\tilde{\mathbf{g}} = \text{diag}(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{D}_\alpha^{-1}, \tilde{D}_\beta^{-1})$ .

Из второго соотношения (52) находим

$$(\mathbf{Q}_\mathcal{E}^T)^{-1} = \tilde{\mathbf{g}}^{-1} \mathbf{Q}_\mathcal{E} \mathbf{g};$$

подставляя в первое из соотношений (52), получим матричное уравнение

$$\mathbf{Q}_\varepsilon \mathbf{\Gamma} \mathbf{g}^{-1} = \tilde{\mathbf{\Gamma}} \tilde{\mathbf{g}}^{-1} \mathbf{Q}_\varepsilon. \quad (53)$$

Обозначая неизвестные  $\lambda_m = \tilde{\mathcal{E}}^{-1} \tilde{\mathbf{M}}^2$ ,  $\lambda_a = \tilde{\mathcal{D}}_\alpha \tilde{\alpha}^2$ ,  $\lambda_b = \tilde{\mathcal{D}}_\beta \tilde{\beta}^2$ , непосредственной проверкой убеждаемся, что (53) эквивалентно уравнениям (51). ■

Таким образом, мы доказали, что при выполнении условий (47), (49) матрица  $\mathbf{Q}_\varepsilon$  состоит из векторов  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , определяемых соотношениями (51). Для того чтобы доказать обратное утверждение, запишем преобразование  $\mathbf{Q}_\varepsilon$  в явном виде, используя (50) и (51),

$$\mathbf{Q}_\varepsilon = \begin{pmatrix} m_1 & \frac{M_\alpha \mathcal{D}_\alpha}{\lambda_1 - \mathcal{D}_\alpha} m_1 & \frac{M_\beta \mathcal{D}_\beta}{\lambda_1 - \mathcal{D}_\beta} m_1 \\ a_1 & \frac{M_\alpha \mathcal{D}_\alpha}{\lambda_2 - \mathcal{D}_\alpha} a_1 & \frac{M_\beta \mathcal{D}_\beta}{\lambda_2 - \mathcal{D}_\beta} a_1 \\ b_1 & \frac{M_\alpha \mathcal{D}_\alpha}{\lambda_3 - \mathcal{D}_\alpha} b_1 & \frac{M_\beta \mathcal{D}_\beta}{\lambda_3 - \mathcal{D}_\beta} b_1 \end{pmatrix}, \quad (54)$$

где  $\lambda_m, \lambda_a, \lambda_b$  — корни кубического уравнения  $\det(\mathbf{\Gamma} - \lambda \mathbf{g}) = 0$ , которое записывается в форме

$$\mathcal{E} \lambda^3 - (\mathcal{E}(\mathcal{D}_\alpha + \mathcal{D}_\beta) + \mathcal{C}) \lambda^2 + (\mathcal{D}_\alpha(\mathcal{C} - M_\alpha^2) + \mathcal{D}_\beta(\mathcal{C} - M_\beta^2) + \mathcal{E} \mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta) \lambda - (\mathcal{C} - M_\alpha^2 - M_\beta^2) \mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta = 0. \quad (55)$$

Несложно показать, что уравнение  $\det(\mathbf{\Gamma} - \lambda \mathbf{g}) = 0$  в случае симметрических  $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{g}$  имеет лишь вещественные корни; кроме того, знак коэффициентов перед степенями  $\lambda$  меняется три раза, следовательно согласно правилу Декарта, все эти корни положительны. С помощью непосредственных вычислений, подставив преобразование (54) в уравнения (52), можно убедиться, что матрицы  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$  и  $\tilde{\mathbf{g}}$  диагональны, причем  $\tilde{\mathcal{E}}$ ,  $\tilde{\mathcal{D}}_\alpha$  и  $\tilde{\mathcal{D}}_\beta$  задаются соотношениями (47), а элементы матрицы имеют вид

$$\tilde{\mathbf{M}}^2 = (\mathbf{m}, \mathbf{\Gamma} \mathbf{m}), \quad \tilde{\alpha}^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{\Gamma} \mathbf{a}), \quad \tilde{\beta}^2 = (\mathbf{b}, \mathbf{\Gamma} \mathbf{b}),$$

где векторы  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  заданы матрицей (54).

Как следует из (54), остаются неопределенными еще три константы  $m_1, a_1, b_1$ , которые можно использовать для нормировки векторов  $\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ .

Таким образом, окончательно получаем, что после преобразования (54) на уровне энергии  $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) = \mathcal{E}$  система сводится к случаю, описанному в разделе 2.4, и, следовательно, согласно предложению 1, может быть явно проинтегрирована в квадратурах.

## 2.7. Бифуркационный анализ и устойчивость периодических решений

1. Случай  $\mathbf{M} \parallel \boldsymbol{\beta}$ . В этом случае постоянные первых интегралов

$$\begin{aligned} \alpha^2 = \beta^2 = 1, \quad (\alpha, \beta) = (\mathbf{M}, \alpha) = (\mathbf{M}, \alpha \times \beta) = 0, \\ (\mathbf{M}, \beta) = M_\beta, \quad (\mathbf{M}, \mathbf{M}) = M_\beta^2, \quad (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) = \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (56)$$

Согласно предложению 1, в этом случае критические периодические траектории определяются критическими решениями системы Чаплыгина на нулевой постоянной площади (см. раздел 1.5). В обозначениях предложения 1 бифуркационные кривые задаются уравнениями

$$\tilde{\mathcal{E}} = A_i \tilde{\mathcal{C}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}), \quad \tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{M}}).$$

После упрощений с использованием соотношений (33), (44) выразим их через константы исходных интегралов

$$\mathcal{E} = \frac{A_i}{1 - \mathcal{D}_\beta A_i} M_\beta^2 = \frac{M_\beta^2}{J_i^{(0)} - \mathcal{D}_\beta^{(0)}},$$

где  $J_i^{(0)}$  — элементы диагональной матрицы  $\mathbf{J}^{(0)} = \mathbf{I} + \left( \sum_k \frac{\mu_k}{r_k^2} \right) \mathbf{E}$ , при этом  $M_\beta \in (-\infty, +\infty)$ .

Для этих решений угловая скорость центрального шара  $\boldsymbol{\omega}$  направлена вдоль одной из его главных осей  $\mathbf{e}_i$  и постоянна в неподвижных осях, так что

$$\mathbf{M} = M_\beta \mathbf{e}_i, \quad \boldsymbol{\omega} = M_\beta A_i \mathbf{e}_i, \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{e}_i, \quad \boldsymbol{\alpha} = \cos \varphi \mathbf{e}_j + \sin \varphi \mathbf{e}_k, \quad \varphi = A_i M_\beta t,$$

где  $i, j, k$  — циклическая перестановка чисел 1, 2, 3.

**2. Общий случай.** Проекции момента на неподвижные оси в данном случае произвольны:

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}) &= M_\alpha, \quad (\mathbf{M}, \boldsymbol{\beta}) = M_\beta, \quad (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = M_\gamma, \\ (\mathbf{M}, \mathbf{M}) &= \mathcal{C} = M_\alpha^2 + M_\beta^2 + M_\gamma^2. \end{aligned}$$

Воспользуемся существованием линейного изоморфизма, описанного в разделах 2.5, 2.6. Согласно теореме 4 и предложению 2, угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  для критических решений в общем случае пропорциональна угловой скорости критических решений при  $\mathbf{M} \parallel \boldsymbol{\beta}$ , следовательно, справедливы соотношения

$$\boldsymbol{\omega} = \Lambda A_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{M} + Z_\alpha \boldsymbol{\alpha} + Z_\beta \boldsymbol{\beta} = \Lambda \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Скалярно умножая первое из этих уравнений на векторы  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ , а второе — на  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{M}, \mathbf{e}_i$ , с учетом (31) и (34) получим уравнения

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}) &= \mathcal{D}_\alpha^{-1} Z_\alpha = \Lambda A_i \alpha_i, \quad (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}) = \mathcal{D}_\beta^{-1} Z_\beta = \Lambda A_i \beta_i, \\ M_\alpha + Z_\alpha &= \Lambda \alpha_i, \quad M_\beta + Z_\beta = \Lambda \beta_i, \\ \mathcal{C} + Z_\alpha M_\alpha + Z_\beta M_\beta &= \Lambda M_i, \quad M_i + Z_\alpha \alpha_i + Z_\beta \beta_i = \Lambda. \end{aligned}$$

Решая их, находим

$$\begin{aligned} \Lambda^2 &= \mathcal{C} + \frac{(2\mathcal{D}_\alpha^{-1} - A_i)A_i}{(\mathcal{D}_\alpha^{-1} - A_i)^2} M_\alpha^2 + \frac{(2\mathcal{D}_\beta^{-1} - A_i)A_i}{(\mathcal{D}_\beta^{-1} - A_i)^2} M_\beta^2, \quad \Lambda M_i = \mathcal{C} + \frac{A_i}{\mathcal{D}_\alpha^{-1} - A_i} M_\alpha^2 + \frac{A_i}{\mathcal{D}_\beta^{-1} - A_i} M_\beta^2, \\ \Lambda \alpha_i &= \frac{\mathcal{D}_\alpha^{-1}}{\mathcal{D}_\alpha^{-1} - A_i} M_\alpha, \quad \Lambda \beta_i = \frac{\mathcal{D}_\beta^{-1}}{\mathcal{D}_\beta^{-1} - A_i} M_\beta, \quad Z_\alpha = \frac{A_i}{\mathcal{D}_\alpha^{-1} - A_i} M_\alpha, \quad Z_\beta = \frac{A_i}{\mathcal{D}_\beta^{-1} - A_i} M_\beta. \end{aligned}$$

Подставляя в соотношения  $\mathcal{E} = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) = \Lambda A_i M_i$ , находим уравнения бифуркационных поверхностей в форме

$$\mathcal{E} = A_i \mathcal{C} + \frac{A_i^2}{\mathcal{D}_\alpha^{-1} - A_i} M_\alpha^2 + \frac{A_i^2}{\mathcal{D}_\beta^{-1} - A_i} M_\beta^2 = \frac{M_\alpha^2}{J_i^{(0)} - \mathcal{D}_\alpha^{(0)}} + \frac{M_\beta^2}{J_i^{(0)} - \mathcal{D}_\beta^{(0)}} + \frac{M_\gamma^2}{J_i^{(0)} - \mathcal{D}_\gamma^{(0)}}.$$



По аналогии с задачей Чаплыгина определим переменные  $E = \frac{\mathcal{E}}{C}$ ,  $g_\alpha = \frac{M_\alpha}{\sqrt{C}}$ ,  $g_\beta = \frac{M_\beta}{\sqrt{C}}$ ,  $g_\gamma = \frac{M_\gamma}{\sqrt{C}}$ , тогда бифуркационные поверхности определены как квадратичные функции

$$\frac{g_\alpha^2}{J_i^{(0)} - \mathcal{D}_\alpha^{(0)}} + \frac{g_\beta^2}{J_i^{(0)} - \mathcal{D}_\beta^{(0)}} + \frac{g_\gamma^2}{J_i^{(0)} - \mathcal{D}_\gamma^{(0)}} = E$$

на единичной сфере

$$g_\alpha^2 + g_\beta^2 + g_\gamma^2 = 1.$$

Характерный вид бифуркационной диаграммы при проекции на плоскость  $g_\alpha, g_\beta$  приведен на рисунке 5.

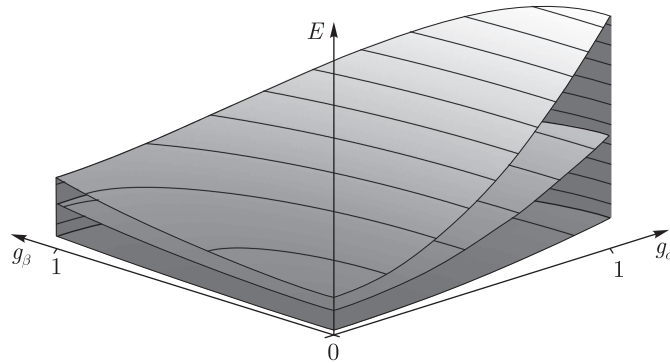


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма в общем случае.

### 3. Движение шара Чаплыгина по прямой (система Веселовых)

В заключение рассмотрим задачу о шаре Чаплыгина с дополнительной связью, вынуждающей шар катиться по прямой [4]. Как и рассмотренные выше задачи, она сводится к системе девяти дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} &= \mathbf{K} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{K} &= (\mathbf{I} + \mathcal{D}\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{I}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (1)$$

Как показано в [4], данные уравнения кроме энергии и очевидных геометрических интегралов допускают дополнительный (квадратичный по импульсам) интеграл движения и интегрирующий множитель. Таким образом, уравнения (1) являются интегрируемыми по теореме Эйлера–Якоби. Позднее в нашей незавершенной книге [3] было показано, что квадратичный по импульсам интеграл можно представить в виде комбинации линейных интегралов. Таким образом, полный набор интегралов системы (1) имеет вид

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) &= (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) = 1, \quad (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0, \quad (\mathbf{K}, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \\ (\mathbf{K}, \boldsymbol{\beta}) &= \text{const}, \quad (\mathbf{K}, \boldsymbol{\gamma}) = (\mathbf{K}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) = \text{const}, \\ \mathcal{E} &= (\mathbf{K}, \boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \quad (2)$$

В случае, когда одна из постоянных площадей равна нулю ( $(\mathbf{K}, \beta) = 0$  или  $(\mathbf{K}, \gamma) = 0$ ) уравнения (1) можно привести к уравнениям, описывающим качение шара по плоскости без проскальзывания и вращения (резинового шара).

1. Пусть  $(\mathbf{K}, \beta) = 0$  ( $\mathbf{K} \parallel \gamma$ ). Тогда после введения вектора

$$\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathcal{D} \frac{\mathcal{E}}{(\mathbf{K}, \gamma)^2} \mathbf{K} = (\mathbf{J} - \alpha \otimes \mathbf{J}\alpha)\omega,$$

где  $\mathbf{J} = \mathbf{I} + \mathcal{D}\mathbf{E}$ , получим замкнутую относительно  $\widehat{\mathbf{K}}$ ,  $\alpha$  систему уравнений, которая описывает качение резинового шара с тензором инерции  $\mathbf{J}$ .

2. Аналогично в случае  $(\mathbf{K}, \gamma) = 0$  ( $\mathbf{K} \parallel \beta$ ), введя вектор

$$\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mathcal{D} \frac{\mathcal{E}}{(\mathbf{K}, \beta)^2} \mathbf{K} = (\mathbf{I} - \alpha \otimes \mathbf{I}\alpha)\omega,$$

получим замкнутую относительно  $\widehat{\mathbf{K}}$ ,  $\alpha$  систему, описывающую качение резинового шара с тензором инерции  $\mathbf{I}$ .

Как известно, задача о качении резинового шара эквивалентна задаче Веселовой (движение твердого тела вокруг неподвижной точки с неголономной связью  $(\omega, \gamma) = 0$ , т. е. нулевой проекцией угловой скорости на одну из неподвижных осей) [5] и может быть явно проинтегрирована с помощью сферо-конических координат. Таким образом, мы доказали, что в случае, когда одна из постоянных площадей равна нулю, рассматриваемая задача также может быть явно проинтегрирована с помощью сферо-конических координат.

В общем случае, когда ни одна из постоянных площадей не равна нулю, явного интегрирования уравнений (1) до сих пор провести не удалось. В связи с этим интересной представляется задача об обобщении изложенного в настоящей статье преобразования и его использование для явного интегрирования задачи Веселовых при произвольных константах площадей.

Авторы благодарят за полезные обсуждения А. В. Болсинова, Ю. Н. Фёдорова, А. В. Цыганова, А. Ю. Москвина.

## Список литературы

- [1] Борисов А. В., Болсинов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН, 2010, т. 65, вып. 2(392), с. 71–132.
- [2] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 608 с.
- [3] Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А., Избранные задачи неголономной механики. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005–2011, электронный препринт: <http://ics.org.ru/doc?book=30&dir=r>.
- [4] Веселов А. П., Веселова Л. Е. Интегрируемые неголономные системы на группах Ли // Матем. заметки, 1988, т. 44, № 5, с. 604–619.
- [5] Веселова Л. Е. Новые случаи интегрируемости уравнений движения твердого тела при наличии неголономной связи // Геометрия, дифференциальные уравнения и механика: Сб. ст. М.: МГУ, 1986. С. 64–68.





- [6] Маркеев А. П. Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью // МТТ, 1986, т. 21, № 1, с. 64–65.
- [7] Фёдоров Ю. Н. О движении твердого тела в шаровом подвесе // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 1988, № 5, с. 91–93.
- [8] Фёдоров Ю. Н. О двух интегрируемых неголономных системах в классической динамике // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 1989, № 4, с. 38–41.
- [9] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, вып. 1, с. 139–168. См. также: Чаплыгин С. А. Собр. соч.: Т. 1. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. С. 76–101.
- [10] Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a non-homogeneous ball over a sphere without slipping and twisting // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 2, pp. 153–159.
- [11] Chung W. Nonholonomic manipulators. (Springer Tr. Adv. Robot., vol. 13.) Berlin–New York: Springer, 2004. 114 pp.
- [12] Duistermaat J. J. Chaplygin’s sphere, arXiv:math/0409019v1.
- [13] Eisenhart L. P. Separable systems of Stäckel // Ann. of Math. (2), 1934, vol. 35, no. 2, pp. 284–305.
- [14] Jovanović B.  $LR$  and  $L + R$  systems // J. Phys. A, 2009, vol. 42, 225202, 18 pp.
- [15] Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis // Regul. Chaotic Dyn., 2001, vol. 6, no. 3, pp. 291–306.
- [16] Koiller J., Ehlers K. Rubber rolling over a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 2, pp. 127–152.
- [17] Kumagai M., Ochiai T. Development of a robot balancing on a ball // Intern. Conf. on Control, Automation and Systems (Seoul, Oct. 14–17, 2008). P. 433–438.
- [18] Lauwers T. B., Kantor G. A., Hollis R. L. A dynamically stable single-wheeled mobile robot with inverse mouse-ball drive // Proc. IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation (Orlando, FL, May 15–19, 2006). P. 2884–2889.
- [19] Nagarajan U., Kantor G., Hollis R. L. Trajectory planning and control of an underactuated dynamically stable single spherical wheeled mobile robot // IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation (Kobe, Japan, May 12–17, 2009). P. 3743–3748.
- [20] Shen J., Schneider D. A., Bloch A. M. Controllability and motion planning of a multibody Chaplygin’s sphere and Chaplygin’s Top // Int. J. Robust Nonlinear Control, 2008, vol. 18, no. 9, pp. 905–945.
- [21] Wilson J. L., Mazzoleni A. P., DeJarnette F. R., Antol J., Hajos G. A., Strickland C. V. Design, analysis, and testing of Mars tumbleweed rover concepts // J. Spacecraft Rockets, 2008, vol. 45, no. 2, pp. 370–382.
- [22] Xu Ya., Ou Yo. Control of single wheel robots. (Springer Tr. Adv. Robot., vol. 20.) Berlin: Springer, 2005. 188 pp.
- [23] <http://www.dyson.co.uk/>

## Generalized Chaplygin’s transformation and explicit integration of a system with a spherical support

Alexey V. Borisov<sup>1</sup>, Alexandr A. Kilin<sup>2</sup>, Ivan S. Mamaev<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Institute of Computer Science

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

<sup>1</sup>[borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru), <sup>2</sup>[mamaev@rcd.ru](mailto:mamaev@rcd.ru), <sup>3</sup>[aka@rcd.ru](mailto:aka@rcd.ru)

We consider the problem of explicit integration and bifurcation analysis for two systems of nonholonomic mechanics. The first one is the Chaplygin’s problem on no-slip rolling of a balanced dynamically non-symmetrical ball on a horizontal plane. The second problem is on the motion of rigid body in a spherical support. We explicitly integrate this problem by generalizing the

transformation which Chaplygin applied to the integration of the problem of the rolling ball at a non-zero constant of areas. We consider the geometric interpretation of this transformation from the viewpoint of a trajectory isomorphism between two systems at different levels of the energy integral. Generalization of this transformation for the case of dynamics in a spherical support allows us to integrate the equations of motion explicitly in quadratures and, in addition, to indicate periodic solutions and analyze their stability. We also show that adding a gyrostat does not lead to the loss of integrability.

MSC 2010: 37J60 37J35 70E18 70F25 70H45

Keywords: nonholonomic mechanics, spherical support, Chaplygin ball, explicit integration, isomorphism, bifurcation analysis

Received April 22, 2011, accepted June 23, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 2, pp. 313–338 (Russian)

